

تقرينة  
 ليكن  $A$  مجموعة الملقاة  $R$  و  $I, J$  متباينين في  $A$  عندئذ يكون  $I+J, I \cap J$  هما متباينان في  $A$

البرهان  
 $a \in A$   $I+J$  متباين في  $A$  ا.  $I \cap J$  متباين في  $A$  و  $I \cap J$  متباين في  $A$   $a \in A$   
 $d_a(I \cap J) \subseteq I \cap J$  حيات

ليكن  $x \in I \cap J$  عندئذ  
 $x \in I, d_a(x) \in I$   
 $x \in J, d_a(x) \in J$   
 $\Rightarrow d_a(x) \in I \cap J$

وهذا  $I \cap J$  متباين

مبرهنة القابل للتأنيق:  
 ليكن  $A$  مجموعة الملقاة التبادلية والراسمة  $R$  و  $I, J$  متباينين في  $A$  عندئذ  

$$\frac{I+J}{I} \cong \frac{J}{I \cap J}$$

البرهان  
 لتصور الملقاة  $k: J \rightarrow \frac{I+J}{I}$  بالبرهان  
 $\forall x \in J: k(x) = x + I$

نريد ان نجيب ان  $k$  متباين لان  $a, b \in J$   $a = b$   $\Leftrightarrow a + I = b + I \Rightarrow k(a) = k(b)$

ان  $k$  متباين لان  
 $k(a+b) = (a+b) + I = (a+I) + (b+I) = k(a) + k(b)$

$\forall \lambda \in R; k(\lambda a) = (\lambda a) + I = \lambda(a+I) = \lambda k(a)$

$k([a, b]) = [a, b] + I = [a+I, b+I] = [k(a), k(b)]$



أي  $a \in I$  فإن  $a \in I+J$

$$\bar{z} = z + I \quad z \in I+J \quad \text{عندئذ} \quad \bar{z} \in \frac{I+J}{I}$$

وبالتالي  $\bar{z} = x + y + I$  حيث  $y \in J, x \in I$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= z + I = (x+y) + I \\ &= (x+I) + (y+I) \end{aligned}$$

سبب جبرية الشكل الأول في أي

$$\frac{J}{\ker k} \cong \frac{I+J}{I}$$

$$k \cdot k^{-1} = I \cap J \quad \text{لأن } k \cdot k^{-1} = I \cap J$$

$$\ker k = \{x \in J ; k(x) = I\}$$

$$= \{x \in J \mid x+I = I\}$$

$$= \{x \in J \mid x \in I\} = I \cap J$$

نريد

أن نرى أن  $I$  هو مثالي جبري في  $A$

البرهان:

نكون  $A$  هو جبري  $I$  مثالي في  $A$  تحت العلاقة

$$\forall x \in A \quad f(x) = x + I$$

$$\forall x, y \in A \quad x = y \quad \text{فقط إذا} \quad x = y$$

$$x+I = y+I$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y)$$

$f$  مثالي جبري في  $A$

$$\forall x, y \in A \quad \lambda \in R : f(x+y) = (x+y) + I = (x+I) + (y+I) = f(x) + f(y)$$

$$f(\lambda x) = \lambda x + I = \lambda(x+I) = \lambda f(x)$$

$$f([x, y]) = [x, y] + I = [x+I, y+I] = [f(x), f(y)]$$



$$f(z) = z - I \in A/I$$

$$\forall z + I \in A/I \quad \text{اذا لم تكن 0}$$

$$\ker f = I \quad \text{نرى ان}$$

$$\forall a \in \ker f; f(a) = a + I \in I$$

$$\Rightarrow \ker f \subset I$$

$$\forall x \in I \quad x + I = I \Rightarrow x \in \ker f$$

$$\Rightarrow I \subset \ker f$$

وهذا امر متوقع المسار

مبرهنة:

ليكن  $A$  جبراً فوق الحقل  $R$ ،  $I$  المثبة في  $A$  المثبة  $\text{Inn}(A)$  المثبة  $\text{Der}(A)$

البرهان:

$$\phi \neq \text{Inn}(A) \subset \text{Der}(A) \quad \text{من اجل ان}$$

$$\text{Inn}(A) = \{d_a; a \in A\}$$

$$\forall d_a, d_b \in \text{Inn}(A) \quad \forall x \in A$$

$$(d_a - d_b)(x) = d_a(x) - d_b(x)$$

$$= [a, x] - [b, x] = [a - b, x] = d_{a-b}(x)$$

$$d_a - d_b = d_{a-b} \in \text{Inn}(A) \quad \text{من اجل ان}$$

$$\forall \lambda \in R \quad \forall x \in A$$

$$(\lambda d_a)(x) = \lambda d_a(x) = \lambda [a, x] = [\lambda a, x] = d_{\lambda a}(x)$$

$$\Rightarrow \lambda d_a = d_{\lambda a} \in \text{Inn}(A)$$

وهذا يعني ان المثبة  $\text{Inn}(A)$  مثبة جزئية في  $\text{Der}(A)$

$$d_a(\text{Inn}(A)) \subset \text{Inn}(A) \quad \text{اذا كان } a \in A \quad \text{نرى ان}$$

$$\text{نرى ان } d_c \in \text{Inn}(A) \quad \text{اذا كان } c \in A \quad \text{نرى ان } d_c(x) = [c, x] \in A$$

$$(d_c)(x) = d_c(x) = [c, x] \in A$$



$$d_a([c, x]) = [d_a(c), x] + [c, d_a(x)]$$

نلاحظ ان

$$[d_a(c), x] = d_a([c, x]) - [c, d_a(x)]$$

$$d_{d_a(c)}(x) = d_a(d_c(x)) - d_c(d_a(x)) = (d_a d_c - d_c d_a)(x) = [d_a, d_c](x)$$

$$d_a(d_c) = d_{d_a(c)} \in \text{Inn}(A) \Leftrightarrow d_{d_a(c)} = [d_a, d_c] \quad \text{ومن هنا}$$

ومن هنا  $\text{Der}(A) \subseteq \text{Inn}(A)$  بالتحديد

تجربتي!

لكن  $A$  ليس هو الحلقة  $R$  الجدية

$$Z(A) = \{a \in A : [a, x] = 0 \quad \forall x \in A\}$$

نسمي  $Z(A)$  بـ  $A$  مركز الجبر  $A$

البرهان:

$$\phi \neq Z(A) \subseteq A$$

$$\forall a \in A : [0, x] = 0 \Rightarrow 0 \in Z(A) \quad \text{نرى}$$

$$\forall a, b \in Z(A) : [a, x] = 0 \quad [b, x] = 0 \quad \forall x \in A$$

$$[a-b, x] = [a, x] - [b, x] = 0 - 0 = 0 \Rightarrow a-b \in Z(A)$$

$$\forall \lambda \in R, a \in Z(A) : [\lambda a, x] = 0 \quad \forall x \in A$$

$$\Rightarrow [\lambda a, x] = \lambda [a, x] = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda a \in Z(A)$$

منه  $Z(A)$  هو  $A$  تحت  $R$

$$\forall c \in A : d_c(Z(A)) \subseteq Z(A) \quad ??$$

لكن  $a \in Z(A)$  ليس بالضرورة

$$d_c(a) = [c, a] = 0 \quad d_c(a) \in Z(A)$$



$$\forall x \in A, [d_c(a), x] = 0$$

$$[d_c(a), x] = [[c, a], x]$$

$$[x, [c, a]] + [c, [a, x]] + [a, [x, c]] = 0$$

بما أن

$$\begin{aligned} [[c, a], x] &= [c, [a, x]] + [a, [x, c]] \\ &= [c, 0] + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [d_c(a), x] = 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow d_c(a) \in Z(A)$$

وبما أن  $Z(A)$  مركزي في  $A$

مبرهنة:

ليكن  $A$  حلق غير التبادلي القبلية الأولية  $R$  على  $R$

$$\frac{A}{Z(A)} \cong \text{Inn}(A)$$

البرهان:

$$\psi: A \rightarrow \text{Inn}(A)$$

$$\forall a \in A, \psi(a) = d_a$$

$$\forall a, b \in A, a = b \Rightarrow [a, x] = [b, x]$$

$$d_a(x) = d_b(x)$$

$$\Rightarrow d_a = d_b$$

$$\psi(a) = \psi(b)$$

وبما أن  $\psi$  نظير

لبنية التباديل

$$\forall a, b \in A, \psi(a+b) = d_{a+b}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in A, d_{a+b}(x) &= [a+b, x] = [a, x] + [b, x] \\ &= d_a(x) + d_b(x) \end{aligned}$$

$$(d_a + d_b)(x) \Rightarrow d_{a+b} = d_a + d_b \Rightarrow \psi(a+b) = d_{a+b} = d_a + d_b = \psi(a) + \psi(b)$$

$$\forall \lambda \in R, \psi(\lambda a) = d_{\lambda a}, \forall x \in A, d_{\lambda a}(x) = [\lambda a, x] = \lambda [a, x]$$



$$\lambda d_a(x) = ( \lambda d_a ) (x) \Rightarrow d_{\lambda a} = \lambda d_a$$

$$\psi(\lambda a) = d_{\lambda a} = \lambda d_a = \lambda \psi(a)$$

$$\psi([a, b]) = d_{[a, b]} \quad \forall x \in A : d_{[a, b]}(x) = [ [a, b], x ]$$

$$[x, [a, b]] + [a, [b, x]] - [b, [x, a]] = 0$$

$$[ [a, b], x ] = [a, [b, x]] + [b, [x, a]]$$

$$[ [a, b], x ] = [a, d_b(x)] - [b, d_a(x)]$$

$$\Rightarrow d_a(d_b(x) - d_b(d_a(x))) = d_a d_b(x) - d_b d_a(x)$$

$$\Rightarrow (d_a d_b - d_b d_a)(x) = [d_a, d_b](x)$$

$$d_{[a, b]} = [d_a, d_b] \Rightarrow \psi([a, b]) = d_{[a, b]} [d_a, d_b]$$

$$= [\psi(a), \psi(b)]$$

$$c, d \in A \text{ and } d \in \text{Ann}(A)$$

$$\psi(c) = d$$

$$c \in \text{Ann}(A) \Rightarrow \psi(c) = d \in \text{Ann}(A)$$

$$c \in \text{Ann}(A) \Rightarrow \psi(c) = d \in \text{Ann}(A)$$

$$A/\ker \psi \cong \text{Im}(\psi)$$

$$\ker \psi = Z(A)$$

$$\forall a \in \ker \psi \Rightarrow \psi(a) = d_a \quad \forall x \in A : d_a(x) = d_0(x)$$

$$[a, x] = [0, x] = 0$$

$$\Rightarrow a \in Z(A)$$

$$\Rightarrow \ker \psi \subseteq Z(A)$$

$$\forall b \in Z(A) : \forall x \in A : [b, x] = 0$$

$$d_b(x) = 0 = d_0(x) \Rightarrow d_b = d_0 \Rightarrow \psi(b) = d_0$$



$$\Rightarrow b \in \ker \psi \Rightarrow Z(A) \subseteq \ker \psi \Rightarrow Z(A) = \ker \psi$$

برهان:  $\pi: A \rightarrow A/I$  هو تماثل من  $A$  إلى  $A/I$ ، ولذا  $\pi$  تماثل من  $A$  إلى  $A/I$ ، ولذا  $\pi$  تماثل من  $A$  إلى  $A/I$ .

$$\theta: A/I \rightarrow B \quad \theta \circ \pi = f$$

$$\forall a+I \in A/I \quad \theta(a+I) = f(a)$$

$$\theta(a+I) = f(a)$$

$$\forall a+I, b+I \in A/I \quad a+I = b+I$$

$$(a+I) - (b+I) = I$$

$$(a-b)+I = I \Rightarrow (a-b) \in I \subseteq \ker f$$

$$\Rightarrow f(a-b) = 0 \Rightarrow f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow \theta(a+I) = \theta(b+I)$$

$$\theta(a+I) = \theta(b+I)$$

$$\theta((a+I) + (b+I)) = \theta((a+b)+I) = f(a+b) = f(a) + f(b) = \theta(a+I) + \theta(b+I)$$

$$\forall \lambda \in R \quad \theta(\lambda(a+I)) = \theta(\lambda a + I) = f(\lambda a) = \lambda f(a) = \lambda \theta(a+I)$$

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [\theta(a+I), \theta(b+I)]$$

$$\pi: A \rightarrow A/I \rightarrow B: \theta \pi = f$$

$$\forall a \in A \quad \pi(a) = a+I \quad \theta(\pi(a)) = \theta(a+I) = f(a)$$

$$(\theta \pi)(a) = f(a)$$

$$\theta \pi = f$$



لین  $A/I \rightarrow B$   $\pi$   $\pi = \rho$   $\Rightarrow \theta \pi = \mu \pi$   $\mu = \theta$   $\mu = \theta$   $\mu = \theta$

$\pi = \rho \Rightarrow \theta \pi = \mu \pi$

$\forall a+I \in A/I \Rightarrow \theta(a+I) = \theta(\pi(a)) = \theta \pi(a)$

$= \mu \pi(a) = \mu(a+I)$

$\mu = \theta$

استریت الی

